

180 Гл. 4. Вспомогательность функции

* В случае, если λ совпадает с одним из концов сегмента $[a, b]$, до предельности следует показать одностороннюю непрерывность.

* Если бы система $\{Z_n\}$, образующая покрытие сегмента $[a, b]$, не была бесконечной, то можно было бы доказать:

Очевидно, что на бесконечной системе открытых множеств $\{\Sigma_n\}$, образующих покрытие множества точек $[X]$, нельзя

Случай $f'(c) < 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 1. Подчеркнем, что положительность (отрицательность) производной $f'(c)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) дифференцируемой в точке c функции $y=f(x)$.

Так, функцию $y=x^3$ возрастает в точке $c=0$, а в то время как производная этой функции $f'(x)=3x^2$ обращается в нуль в точке $c=0$ (график функции — на рис. 3).

Теорема 62 (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c)=0$.

Доказательство. По условию теоремы существует конечная производная $f'(c)$. Так как функция $y=f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум, то она не может в этой точке c ни возрастать, ни убывать. Значит, в силу теоремы 6.1 производная $f'(c)$ не может быть ни положительной, ни отрицательной. Тем самым доказано, что $f'(c)=0$.

Теорема 6.2 имеет очень простой геометрический смысл: она утверждает, что если в той точке кривой $y=f(x)$, в которой достигается локальный экстремум, существует касательная к этой кривой, то эта касательная обязательно параллельна оси Ox (рис. 6.3).

Замечание 2. Пример той же самой функции $y=x^3$ (см. рис. 6.2) показывает, что обращение в ноль производной является лишь необходимым и не является достаточным условием локального экстремума. (Принимая $f'(x) = 3x^2$ этой функции обраща-

§ 2. ТЕОРЕМА О НУЛЕ ПРОИЗВОДНОЙ. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках. Тогда найдется точка ξ из интервала (a, b) , такая, что

Доказательство. Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ следующую вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \quad (6.2)$$

Проверим, что для функции $F(x)$ выполняются все условия теоремы Ролле. В самом деле, $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ (как разность функции $f(x)$ и линейной функции) и по всем внутренним точкам сегмента $[a, b]$ имеет производную, равную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Из формулы (6.2) очевидно, что $F(a) = F(b) = 0$.

Согласно теореме Ролля внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0. \quad (6.3)$$

Из равенства (6.3) вытекают формулы Лагранжа (6.1). Подчеркнем, что в формуле (6.1) вовсе не обязательно считать, что $\delta \neq 0$.

Замечание. Мы получим теорему Лагранжа как следствие теоремы Ролля. Заметим вместе с тем, что сама теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа (при $f(a) = f(b)$).
Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа заметим, что величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ кривой $y=f(x)$, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$, проходящей через точку

Рис. 5.3

Для установления неравенства (6.11) следует применить теорему Лагранжа по сомножителю $[x, x_1]$ к функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и учесть, что $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

§ 4. ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ (ФОРМУЛА КОШИ)

В этом параграфе мы докажем теорему, представляющую Коши и обобщающую предыдущие, которую можно назвать Лейбниц-Лагранжа.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad (6.13)$$

Докладственность. Прежде всего докажем, что $g(a) = g(b)$. В самом деле, если бы это было не так, то для функции $g(x)$ были бы выделены на сегменте $[a, b]$ все условия теоремы 6.3 (Ролле) и по этой теореме нулея сегмента $[a, b]$ нашла бы точка ξ такая, что $g'(\xi) = 0$. Последнее противоречит условию теоремы. Итак, $g(a) = g(b)$, и мы можем право рассмотреть следующую вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} [g(x) - g(a)]. \quad (6.14)$$

В силу требований, наложенных на функции $f(x)$ и $g(x)$, функция $F(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента. Кроме того, очевидно, что $F(a) = F(b)$. Таким образом, для $F(x)$ выполняются все условия теоремы 6.3 (Ролля). Согласно этой теореме внутри сегмента $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что

$$F'(\xi) = 0. \quad (6.15)$$

Имея в виду, что $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} g(x)$, и используя

$$\Gamma(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(\xi) - g(a)} g'(\xi) = 0. \quad (6.16)$$

Теорема 6.9 дает правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, сводящее вычисление предела в точке a отношения двух функций к вычислению предела в этой точке отношения производных этих функций.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность значений x из промежутка, сходящаяся к a и состоящая из чисел отличных от a . Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a , положив их равными нулю в этой точке. При таком доопределении функций $f(x)$ и $g(x)$ окажется непрерывными всюду на множестве M .

множестве C_0 , состояющем из точек a , т. е. в силу α -близости точек a и b . В самом деле, непрерывность $f(x)$ и $g(x)$ во всех точках α -близости точек a и b , за исключением самой точки a , вытекают из их дифференцируемости в этих точках, а непрерывность $f(x)$ и $g(x)$ в точке a вытекает из того, что в силу указанного доопределения этих функций их пределы в точке a равны частным значениям в этой точке.

Учитывая, что все элементы последовательности $\{x_n\}$ принадлежат множеству C_0 , рассмотрим произвольный сегмент, ограниченный точками a и b .

В силу сказанного выше обе функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывными на таком сегменте. Кроме того, функции $f'(x)$ и $g'(x)$ дифференцируемы во всех внутренних точках указанного сегмента, и производная $g'(x)$ не обращается в этих внутренних точках в нуль.

Это дает нам право применять к функциям $f(x)$ и $g(x)$ по указанному сегменту, ограниченному точками a и x_0 , теорему Коши 6.8.

В силу этой теоремы между точками a и x_0 найдется точка ξ , такая, что справедливо равенство

Учитывая, что по нашему доопределению функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливы равенства $f(a) - g(a) = 0$, мы можем переписать соотношение (6.21) в виде

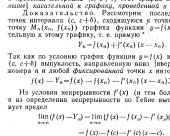
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (6.21)$$

Пустя теперь в соотножении (6.22) номер n стремимся к бесконечности, тогда левая часть последнего Σ -выражения перейдет к $\frac{f(x)}{g(x)}$.

и $L_1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В силу существования предела (6.18) и определения предела функции по Гейне правая часть (6.22) имеет предел при $n \rightarrow \infty$, равный пределу (6.18). Значит, тот же самый предел при $n \rightarrow \infty$ имеют и левая часть (6.22). В силу универсальности последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, складывающейся к a , и в силу определения предела функции по Гейне существо-

Докажем следующие две леммы.

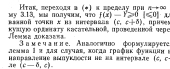
Лемма 1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет асиму в δ -окрестности точки c , причем эта асимута в точке c . Тогда, если график функции $y=f(x)$ в поле $(c, c+\delta)$ выпуклый, то параллельную ему прямую в поле $(c, c+\delta)$ не касается этот график.



Из существования последнего предела в силу теоремы 3.13 на § 1 гл. 3 мы получим, что

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) + o(|x - c|).$$

Если обозначить через Y текущую ординату проходящей через точку $M(c, f(c))$, то после можно переписать в виде

$$f(x) - Y \geq 0 \quad [x \geq 0].$$


* Мы используем уравнение прямой, проходящей $M_n(x_n, f(x_n))$ и имеющей угловой коэффициент, равный ординате этой прямой (обозначаем через T_n).

графика функции $y = x^4$. Для этой функции в точке $x = 124$ обращается в нуль в точке $x = 0$, то есть перегиб в точке $M(0, 0)$.

В силу теоремы 7.7 для отыскания всех точек с двумя двоякими дифференцируемыми функциями $y = f(x)$ решить все корни уравнения $f'''(x) = 0$.

Поскольку решение нулю второй производной необходимо условием перегиба, то нужно дополнительно задать вопрос о наличии перегиба в каждой из точек $x = 0$. Для проведения такого исследования нужно задать следующие условия перегиба, к чему мы и переходим.

2. Первое достаточное условие перегиба.

7.8. Пусть функция $y=f(x)$ на некоторой окрестности точки c и $f'(c)$

в пределах некоторой окрестности второй точки x_2 (то есть x_2 не является точкой x_1), то справедливо утверждение $x_1 \neq x_2$.

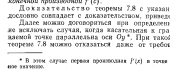
Доказательство. Заметим, в поперечном сечении $y = y(x)$ имеет касательную в точке $M_1(x_1, y(x_1))$ и $M_2(x_2, y(x_2))$. Если бы $x_1 = x_2$, то касательные в этих точках совпали бы, что, в силу того, что $f'(x)$ слева и справа от x_1 не совпадают (в силу $f''(x_1) \neq 0$), невозможно.

Пример. Найдите точки перегиба графиков $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$. Это функцию мы исследовали ранее. Имеем $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$ и $f''(x) = 6x - 4$. Приравняв $f''(x) = 6x - 4$ к нулю, находим единственную точку перегиба $x = 2/3$. Проверим, что в этой точке $f''(x) \neq 0$. Имеем $f''(2/3) = 6 \cdot 2/3 - 4 = 2 \neq 0$. Следовательно, в точке $x = 2/3$ график функции имеет перегиб.

Замечание. Если $f''(x) = 0$ в некоторой точке x_0 , то это не означает, что в этой точке x_0 график функции имеет перегиб. Прежде всего заметим, что в x_0 не существует касательной к графику функции. Поэтому в x_0 не выполняется условие теоремы о перегибе. Кроме того, в x_0 не выполняется условие $f''(x) \neq 0$. Поэтому в x_0 не выполняется условие теоремы о перегибе. Следовательно, в x_0 график функции не имеет перегиба.

Пример. Проверьте, что в точке $x = 0$ график функции $y = x^4$ не имеет перегиба.

Решение. Имеем $f'(x) = 4x^3$ и $f''(x) = 12x^2$. Приравняв $f''(x) = 12x^2$ к нулю, находим $x = 0$. Проверим, что в этой точке $f''(x) = 0$. Имеем $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ график функции не имеет перегиба.



Для исследования графика функции $y=f(x)$ прежде всего проделаем следующие шаги:

- 1°. Уточним область определения функции.
- 2°. Выясним вопрос о существовании асимптот и их уравнения.
- 3°. Найдем области возрастания и убывания функции.
- 4°. Найдем области сохранения направления кривой при переходе.
- 5°. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.
- 6°. Построим график функции.

В качестве примера построим графика функции

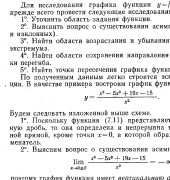
$$y = \frac{x^2 - 5x^2 + 3x - 15}{x^2 - 1}$$

Будем следовать наложенной схеме.

- 1°. Поскольку функция (7.1) представляет собой дробь, то она определена и непрерывна в каждой точке, кроме точек $x=0$, в которой она имеет разрыв.
- 2°. Выясним вопрос о существовании асимптот

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x^2 + 3x - 15}{x^2 - 1} = \frac{-15}{-1} = 15$$

Получившаяся функция имеет горизонтальную асимптоту $y=15$.


$$y' = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-5 + \frac{19}{x} - \frac{15}{x^2} \right) = -5$$

вытекает, что при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ график функции асимптотически $Y = x - 5$.

3. Для нахождения областей возрастания или убывания производной функции (7.11):

$$y' = \frac{x^3 - 19x + 30}{x^3} = \frac{(x+5)(x-2)(x-3)}{x^3}$$

Имея в виду, кроме того, что сама функция и ее производная существуют при $x=0$, мы получим следующие знаки y' :

284 Гл. 7. Использование графика функции

шестивенный
 что график
 от ось Ox

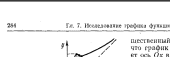
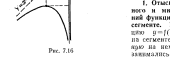


Рис. 7.16



Максимальное значение функции $f(x)$ можно во внутренней точке x_0 сегмента $[a, b]$ (тогда

Рис. 7.17

одним из локальных максимумов функции $f(x)$ на одном из концов сегмента $[a, b]$ (рис. 7.18) для нахождения максимального значения функции $f(x)$ можно считать, что свободный

